ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I3 1982

М.Ф.Косаренко

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ $H_r \subset {}^{\ell}S_N$.

В данной работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [I] строятся основные поля фундаментальных геометрических объектов регулярной гиперполосы H_r в неевклидовом N-мерном пространстве ${}^{\ell}S_N$ ранга ℓ. В дальнейшем будем обозначать такую гиперполосу символом SH_r. С помощью построенных полей фундаментальных геометрических объектов удается присоединить внутренним инвариантным образом точечный репер $\{M_I\}$ и тангенциальный репер σ^{K} в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_r.

В окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_r найдены двупараметрическая связка инвариантно присоединенных к гиперполосе полей соприкасающихся гиперквадрик и ∞^1 инвариантных двойственных нормализаций гиперполосы SH_r.

Обозначения и замечания:

а/ во всей работе используется следующая схема индексов:

$$i,j,k = 1,2,\dots,r; \quad \alpha,\beta,\gamma = r+1,\dots,N-1;$$
$$I,J,K = 0,1,\dots,N; \quad \hat{I},\hat{J},\hat{K} = 1,2,\dots,N;$$

б/ оператор дифференцирования ∇_d действует по закону: $\nabla_d T^{k}_{\alpha i} = dT^{k}_{\alpha i} - T^{k}_{\beta i}\omega^{\beta}_{\alpha} - T^{k}_{\alpha j}\omega^{j}_{i} + T^{j}_{\alpha i}\omega^{k}_{j}$;

в/ символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω^{K}_{I} при фиксированных главных параметрах через π^{K}_{I}. В этом случае оператор дифференцирования обозначается символом ∇_δ.

I. Пусть в проективном пространстве P_N задана невырожденная гиперквадрика

$$g'_{IJ} x^I x^J = 0, \quad g'_{IJ} = g'_{JI}, \quad \det \| g'_{IJ} \| \neq 0, \tag{1}$$

и пусть в каноническом виде ее уравнения меньшее из чисел коэффициентов одного знака равно ℓ. Тогда можно определить подгруппу коллинеаций пространства P_N, сохраняющих эту гиперквадрику, а следовательно, и соответствующую проективную метрику. Получаемое проективное пространство с этой фундаментальной группой называется расширенным неевклидовым пространством ${}^{\ell}S_N$ индекса ℓ [2], а гиперквадрика (1) называется его абсолютом.

Если отнести пространство ${}^{\ell}S_N$ к подвижному автополярному нормированному реперу $\mathcal{R} = \{M_0, M_1, \dots, M_N\}$, т.е. к реперу, при котором

$$|g_{IK}| = \begin{cases} 0, \text{если } I \neq K, \\ 1, \text{если } I = K, \end{cases} \tag{2}$$

где $g_{\hat{I}\hat{K}} = \frac{1}{g'_{00}} g'_{\hat{I}\hat{K}}$, (3)

то формы ω^{I}_{K} удовлетворяют уравнениям

$$\omega^{I}_{K} = -\varepsilon_{IK}\,\omega^{K}_{I}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_{IK} = g^{II} g_{KK} = g_{II} g_{KK} = g_{KK} g^{II}$. (5)

В пространстве ${}^{\ell}S_N$ гиперполоса SH_r относительно репера $\mathcal{R}$ задается следующим образом:

$$\omega^{N}_{0} = 0, \quad \omega^{N}_{\alpha} = 0, \quad \omega^{\alpha}_{0} = 0, \tag{6}$$

$$\omega^{0}_{N} = 0, \quad \omega^{\alpha}_{N} = 0, \quad \omega^{0}_{\alpha} = 0, \tag{7}$$

$$\omega^{N}_{i} = a_{ij}\omega^{j}, \quad \nabla a_{ij} = -a_{ij}\omega^{N}_{N} - a_{ijk}\omega^{k}, \tag{8}$$

$$\omega^{i}_{\alpha} = b^{i}_{\alpha j}\omega^{j}, \quad \nabla b^{i}_{\alpha j} = b^{i}_{\alpha jk}\omega^{k}, \tag{9}$$

$$\omega^{\alpha}_{i} = -\varepsilon_{\alpha i} b^{i}_{\alpha j}\omega^{j}, \quad \omega^{0}_{i} = -\varepsilon_{0i}\omega^{i}, \quad \omega^{i}_{N} = -\varepsilon_{iN} a_{ij}\omega^{j}, \tag{10}$$

при этом $b^{i}_{\alpha j} a_{i\ell} = b^{i}_{\alpha\ell} a_{ij}$, $a_{ij} = a_{ji}$, (11)

а функции a_{ijk}, $b^{i}_{\alpha jk}$ симметричны по индексам j,k.

Системы величин $\Gamma_2=\{a_{ij}, b^i_{\alpha j}\}$, $\Gamma_3=\{\Gamma_2, a_{ijk}, b^i_{\alpha jk}\}$ образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков гиперполосы SH_r. Дальнейшее продолжение системы уравнений (6)–(10) вводит геометрические объекты четвертого и более порядков, определяемые гиперполосой SH_r. Полученная таким образом последовательность геометрических объектов $\Gamma_2\subset\Gamma_3\subset\Gamma_4\subset\ldots$ называется фундаментальной последовательностью геометрических объектов гиперполосы SH_r.

2. Следуя работам [4]-[5], последовательно строим следующие объекты гиперполосы SH_r:

а/тензоры второго порядка

$$
\begin{aligned}
&B_\alpha=\tfrac{1}{r}b^i_{\alpha i}, && \nabla_\delta B_\alpha=0;\\
&B^\alpha=-\tfrac{1}{r}\sum_i \varepsilon_{\alpha i}b^i_{\alpha j}a^{ij}, && \nabla_\delta B^\alpha=B^\alpha\pi^N_N;\\
&c^{ij}_\alpha=b^i_{\alpha l}a^{jl}-B_\alpha a^{ij}, && \nabla_\delta c^{ij}_\alpha=c^{ij}_\alpha\pi^N_N;\\
&c^\alpha_{ij}=-(\varepsilon_{\alpha i}b^i_{\alpha j}+B^\alpha a_{ij}), && \nabla_\delta c^\alpha_{ij}=0;\\
&d_i=\tfrac{1}{r+2}a_{jki}a^{jk}, && \nabla_\delta d_i=0;\\
&d^i=\tfrac{1}{r+2}a^{jki}a_{jk}, && \nabla_\delta d^i=d^i\pi^N_N;\\
&\ell_{ijk}=a_{ijk}-a_{(ij}d_{k)}, && \nabla_\delta \ell_{ijk}=-\ell_{ijk}\pi^N_N,\\
&\ell^{ijk}=a^{ijk}-a^{(ij}d^{k)}, && \nabla_\delta \ell^{ijk}=2\ell^{ijk}\pi^N_N;\\
&\lambda_i=a^{jk}a^{lp}\ell_{kpi}c^\alpha_{jl}B_\alpha, && \nabla_\delta\lambda_i=\lambda_i\pi^N_N;\\
&\mathcal{L}_{ij}=a^{kl}a^{mp}\ell_{ikm}\ell_{jlp}, && \nabla_\delta\mathcal{L}_{ij}=0;\\
&\mathcal{L}_{ij}\mathcal{L}^{jk}=\delta^k_i, && \nabla_\delta\mathcal{L}^{jk}=0;\\
&\ell^i_{\alpha j}=c^{ik}_\alpha a_{kj}, && \nabla_\delta \ell^i_{\alpha j}=0;\\
&\ell^\alpha_\beta=\tfrac{1}{r}c^{ij}_\beta c^\alpha_{ij}, && \nabla_\delta \ell^\alpha_\beta=\ell^\alpha_\beta\pi^N_N;\\
&\ell_{\alpha\beta}=\ell^i_{\alpha j}\ell^j_{\beta i}, && \nabla_\delta \ell_{\alpha\beta}=0;\\
&\tilde{\ell}^\alpha_\beta\ell^\beta_\gamma=\delta^\alpha_\gamma, && \nabla_\delta\tilde{\ell}^\alpha_\beta=-\tilde{\ell}^\alpha_\beta\pi^N_N;\\
&\mathcal{L}_{\alpha\beta}=\tilde{\ell}^\gamma_\alpha\ell_{\gamma\beta}, && \nabla_\delta\mathcal{L}_{\alpha\beta}=-\mathcal{L}_{\alpha\beta}\pi^N_N;\\
&\ell_\alpha=-(\mathcal{L}_{\alpha\beta}B^\beta+B_\alpha), && \nabla_\delta \ell_\alpha=0;
\end{aligned}
\tag{12}
$$

б/относительные инварианты второго порядка

$$
\begin{aligned}
&k_0=\ell^\alpha_\alpha, && \delta k_0=k_0\pi^N_N,\\
&h=\mathcal{L}_{ij}a^{ij}, && \delta\ln h=\omega^N_N+h_i\omega^i,\\
&\ell_0=\ell_{ijk}\ell^{ijk}, && d\ln\ell_0=\omega^N_N+\ell_i\omega^i;
\end{aligned}
\tag{13}
$$

в/относительный инвариант третьего порядка

$$
T=\frac{1}{r}(d_{ij}-d_i d_j)a^{ij},\quad \delta T=T\pi^N_N;
\tag{14}
$$

г/ тензоры третьего порядка

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}_{ij}=d_{ij}-d_i d_j-Ta_{ij}, && \nabla_\delta\hat{T}_{ij}=0;\\
&\hat{T}_i=a^{jk}a^{lm}\hat{T}_{jl}\ell_{kmi}+\lambda_i, && \nabla_\delta\hat{T}_i=\hat{T}_i\pi^N_N;\\
&T^i=\mathcal{L}^{ij}\hat{T}_j, && \nabla_\delta T^i=T^i\pi^N_N,\\
&S^i=a^{ik}(h_k-d_k), && \nabla_\delta S^i=S^i\pi^N_N;
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Наконец, по аналогии с работой [3] строим относительные инварианты третьего порядка

$$
\Lambda^0=\frac{\alpha\tilde{X}+\beta\bar{X}}{\alpha+\beta},\quad \Lambda_N=\frac{\alpha\tilde{Y}+\beta\bar{Y}}{\alpha+\beta},
\tag{16}
$$

$$
\nabla_\delta\Lambda^0=\Lambda^0\pi^N_N,\quad \nabla_\delta\Lambda_N=\Lambda_N\pi^N_N,
\tag{17}
$$

где

$$
\tilde{X}=\tfrac{1}{2}(-B_\alpha B^\alpha+T+a_{ij}d^i d^j)+d^i d_i;\ \bar{X}=-(\bar{Y}+B_\alpha B^\alpha+d_i d^i),
$$

$$
\bar{Y}=\tfrac{1}{2}(-B_\alpha B^\alpha+T+a^{ij}d_i d_j)+d^i d_i,\ \tilde{Y}=-(\tilde{X}+B_\alpha B^\alpha+d_i d^i),
$$

α и β – произвольные действительные числа, не равные одновременно нулю, и $\alpha\neq-\beta$.

3. Внутренние инвариантные реперы $\{M_y\}$ и $\{\sigma^x\}$ будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
&M_0=A_0, && \sigma^0=\tau^0-x_i\tau^i-x_\alpha\tau^\alpha+x_N\tau^N,\\
&M_\alpha=A_\alpha+x_\alpha A_0, && \sigma^\alpha=\tau^\alpha+y^\alpha\tau^N,\\
&M_i=A_i+x_i A_0, && \sigma^i=\tau^i+y^i\tau^N,\\
&M_N=A_N-y^\alpha A_\alpha-y^i A_i+y^0 A_0, && \sigma^N=\tau^N,
\end{aligned}
$$

где оснащающие объекты $\{x_\alpha\}, \{y^\alpha\}, \{x_i\}, \{y^i\}, \{x_i, x_\alpha, x_N\}$, $\{y^i, y^\alpha, y^0\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям относительно стационарной группы образующего элемента гиперполосы SH_τ :

$$\begin{aligned} &\nabla_\delta x_\alpha = 0, & &\nabla_\delta y^\alpha = y^\alpha \pi_N^N, \\ &\nabla_\delta x_i = 0, & &\nabla_\delta y^i = y^i \pi_N^N, \\ &\nabla_\delta x_N = x_N \pi_N^N, & &\nabla_\delta y^0 = y^0 \pi_N^N. \end{aligned} \tag{18}$$

Кроме того, оснащающие объекты связаны соотношением

$$x_N + y^0 + x_\alpha y^\alpha + x_i y^i = 0, \tag{19}$$

полученным из условия инцидентности точки M_N и гиперплоскости σ^0.

Если положить

$$x_\alpha = B_\alpha,\ y^\alpha = B^\alpha,\ x_i = d_i,\ y^i = d^i,\ y^0 = \Lambda^0,\ x_N = \Lambda_N,$$

то в силу (12), (16) дифференциальные уравнения (18) удовлетворяются, и соотношение (19) выполняется.

Таким образом, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_τ, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &M_0 = A_0, & &\sigma^0 = \tau^0 - d_i\tau^i - B_\alpha\tau^\alpha + \Lambda_N\tau^N, \\ &M_i = A_i + d_i A_0, & &\sigma^i = \tau^i + d^i\tau^N, \\ &M_\alpha = A_\alpha + B_\alpha A_0, & &\sigma^\alpha = \tau^\alpha + B^\alpha\tau^N, \\ &M_N = A_N - d^i A_i - B^\alpha A_\alpha + \Lambda^0 A_0, & &\sigma^N = \tau^N. \end{aligned}$$

4. По аналогии с [6] гиперквадрику Q_{N-1} назовем соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы SH_τ, если она имеет касание второго порядка с базисной поверхностью V_τ данной гиперполосы. В дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_τ найдена двупараметрическая связка инвариантно присоединенных к гиперполосе полей соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в точечном репере записываются в виде

$$a_{ij}x^i x^j + 2d_i x^i x^N + \mathcal{L}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\ell_\alpha x^\alpha x^N + \\ + (T + u_1 \kappa_0 + u_2 \ell_0)(x^N)^2 = 2x^0 x^N, \tag{20}$$

где u_1, u_2 – инвариантные параметры.

Заметим, что относительно этого поля соприкасающихся гиперквадрик касательная плоскость $T_\tau(A)$ базисной поверхности V_τ и характеристика $T_{N-\tau-1}(A)$ главной касательной гиперплоскости являются сопряженными.

5. Регулярная гиперполоса SH_τ называется двойственно нормализованной [7], если ее базисная поверхность V_τ нормализована в смысле А.П.Нордена [8], причем ее нормаль первого рода $N_{N-\tau}(A)$ в каждой точке $A \in V_\tau$ содержит характеристику $T_{N-\tau-1}(A)$ главной касательной гиперплоскости.

В дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы SH_τ внутренним инвариантным образом получено поле инвариантных нормалей первого рода $N = [T_{N-\tau-1}, h]$, где $h = [M_0 P]$,

$$P = B^\alpha M_\alpha + [-T^i + \tau(T^i + S^i)]M_i + M_N,$$

τ – инвариантный параметр.

Если взять в качестве инвариантных нормалей второго рода поле плоскостей $T_{\tau-1}(A) \subset T_\tau(A)$, полярно сопряженное относительно соприкасающихся гиперквадрик (20), то для гиперполосы SH_τ внутренним образом будет построено ∞^1 инвариантных двойственных нормализаций.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. об-ва, 1953, №2, с.275-382.

2. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы геометрии. М. Гостехиздат, 1955.

3. П о п о в Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной

m-мерной гиперполосы H^r_m ранга r многомерного проективного пространства.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.6,Калининград,1975, с.102-142.

4.В а с и л я н М,А. Проективная теория многомерных гиперполос.-ДАН Арм.ССР.Матем.,1971,т.6,№6,с.477-481.

5.С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы.-Изв.вузов.Матем.,1975,№10, с.97-99.

6.О л о н и ч е в П.И. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос.ДАН СССР,т.80,№2,1951, с.165-168.

7.Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация. Докл.АН Арм.ССР,1959,28,№4,с.151-157.

8.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л.,Гостехиздат,1957.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

М.В.К р е т о в

СВОЙСТВА СВЯЗНОСТЕЙ,ПОРОЖДЕННЫХ КОМПЛЕКСАМИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n продолжается изучение комплексов (n-параметрических семейств) K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q [1].Распространяется понятие ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности расслоения линейных реперов [2],[3] на случай главного расслоения $G_{n^2-n+1}\ (K_n)$,базой которого является комплекс K_n ,а типовым слоем (n^2-n+1) -членная подгруппа стационарности центрированной диаметральной гиперплоскости P [4]. С его помощью геометрически охарактеризованы связности,индуцированные полем одномерных направлений $\mathcal{N}_n$,не параллельных гиперплоскости P ,которые рассмотрены в работе [1].Показана также эквивалентность геометрических характеристик объектов касательной и нормальной линейных связностей с помощью конструкций центрального проектирования и параллельного перенесения ([5],[6]).

Отнесем комплекс K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q к реперу $R=\{A,\vec{e}_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta=\overline{1,n})$, где A-центр гиперквадрики.

Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа комплекса K_n [1],соответственно имеют вид:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\nabla a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma \tag{2}$$